順序数によるある積空間の基数関数による特性化定理

神奈川大学 工学部
平田 康史 (Yasushi Hirata)　矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1　新たな問題提起とその背景

ここでは，すべての位相空間は空でない正則 T_1-空間とする。

先ずは，2つの基本的な基数関数を述べておこう。任意の位相空間 X に対して，

$$e(X) = \omega \cdot \sup\{|D| : D \text{ は } X \text{ における discrete 閉集合}\},$$
$$L(X) = \omega \cdot \min\{\kappa : X \text{ の任意の開被覆は濃度 } \kappa \text{ 以下のある部分被覆をもつ}\}$$

をそれぞれ X の **extent** および**リンデレーフ数**とよぶ。

任意の位相空間 X に対して，$e(X) \leq L(X)$ は常に成り立つ。特に，X が **リンデレーフ空間**とは，$L(X) = \omega$ を満たすとき。

先ずは次の有名な定理から始めよう。

定理 1.1 (Arhangel'skiĭ 1969, [1]). もしリンデレーフ空間 X が第1可算であるならば，X の濃度は 2^ω 以下となる。

位相空間 X で**各点が** G_δ とは，任意の点 $x \in X$ で $\{x\}$ が G_δ-集合となるとき。当然，位相空間 X が第1可算ならば，各点は G_δ となる。

定理 1.1 から次の自然な問題が提起された。

問題 1 (Arhangel'skiĭ). リンデレーフ空間 X において，各点が G_δ ならば，X の濃度は 2^ω 以下となるか？

問題1の否定的解決が Shelah により，1977年に次のように与えられた。その結果はよく引用されていたが，実際の出版は大幅に遅れた。

定理 1.2 (Shelah 1977, see [10]). GCH(一般連続体仮説) が成り立つある ZFC のモデルにおいて，濃度 ω_2 のリンデレーフ空間 X で各点が G_δ となるものが存在する。

一般に，リンデレーフ空間の積空間がリンデレーフにならないことは，よく知られている。実際，次の例をすぐに思いつく。

例 1.3. Sorgenfrey 直線 S に対して，次が成り立つ。

$$L(S \times S) = e(S \times S) = 2^\omega > \omega = L(S) = e(S).$$

これに対して，次の自然な問題が提起される。

問題 2. リンデレーフ空間 X, Y で，$L(X \times Y) > 2^\omega$ となるものは存在するか？

この問題 2 は ZFC においては，未だに未解決である。

しかし，問題 2 は問題 1 とも関連して肯定的に無矛盾であることは知られており，その研究は次のように発展してきた。ここで，CH は連続体仮説を表す。

定理 1.4. CH が成り立つあるモデルにおいて，リンデレーフ空間 X, Y で各点が G_δ であり，次の条件を満たすものが存在する。

(1) $e(X \times Y) = (2^\omega)^+ = \omega_2$ (Shelah 1978 and Hajnal-Juhász 1980, see [10], [3]),

(2) $e(X \times Y) = 2^{\omega_1}$ であり，2^{ω_1} は 2^ω に関わらず任意に大きくできる (Gorelic, 1994 [2]).

最近では次の結果が示されている。

定理 1.5 (Usuba 2019, [11]). コーエン強制概念 $\mathbb{C}$ によるジェネリック拡大において，$\min\{\kappa :$ 任意のリンデレーフ空間 X に対して, $e(X^2) \leq \kappa\}$ が，最小可測基数と一致する。

こうして問題 2 に対する考察は，上の定理に見られるように

位相空間論の基本的問題 $\Longrightarrow$ ZFC のモデルを構成して無矛盾性を証明

という方向で進展してきた。これは強制法なしでは，扱えない解決パターンである。そこで，我々は上記のことを勘案して，

位相空間論の基本的問題 $\Longrightarrow$ 位相空間論的に扱える問題に変形

というパターンにして，次の新しい問題を提起するに至った。

問題 3. どのような位相空間 X, Y に対して，$e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

注意. 問題 3 においては，問題 2 が発端であることから，$L(X \times Y) = L(X) \cdot L(Y)$ を先に議論する方が自然である。しかし，積空間の被覆性研究の観点から，この形の研究はあまり発展性がないように思える。

2　順序数の部分空間による積空間の研究

順序数の部分空間による積空間の研究は，1992 年に家本-大田-玉野 [7] によりその正規性や可算パラコンパクト性の特徴付けの研究から始められた。一般の位相空間による積空間にくらべて，かなり特殊な積空間だけに，左程長い期間の研究対象にはならないように思えた。しかし、現在に至るまで 30 年近くに渡って研究され続けてきた。それは特殊な積空間だけに、その世界でかなり予想外の結果を生じてきたからかもしれない。

先ずは，順序数の部分空間を考えるとき，基本的な事柄から説明していこう。

順序数 μ に対して，$\mu = [0, \mu)$ に通常の順序による位相を導入する。すなわち，任意の $\alpha \in \mu$ に対して，α の μ における近傍基を $\{(\beta, \alpha] : -1 \leq \beta < \alpha\}$ により与える。これによって，μ は位相空間となる。

極限順序数 λ とその部分空間 A に対して，A が λ で**非有界**とは，$\sup A = \lambda$ となるときであり，そうでないとき，A が λ で**有界**という。

$A \subset \lambda$ が λ で**定常的**であるとは，A が λ での任意の非有界閉集合 C と交わるとき。

極限順序数 μ に対して，関数 $c : \mathrm{cf}\,(\mu) + 1 \to \mu + 1$ が $\alpha < \beta$ ならば $c(\alpha) < c(\beta)$ であり，任意の極限順序数 $\gamma \leq \mathrm{cf}\,(\mu)$ に対して $c(\gamma) = \sup\{c(\gamma') : \gamma' < \gamma\}$ となり，さらに $c(\mathrm{cf}\,(\mu)) = \mu$ となるとき，c は μ の**標準関数**であるという。任意の極限順序数 μ に対して，μ の標準関数は必ず存在する。

T_2-空間 X が**可算パラコンパクト**であるとは，任意の可算開被覆がある局所有限開細分をもつとき。

では，最初に証明された本稿に関係の深い次の結果を述べる。

定理 2.1 (家本-大田-玉野 1992, [7]). 順序数 $\lambda + 1$ の任意の部分空間 A, B に対して，次は同値である。

(1)　$A \times B$ は可算バラコンパクトである。

(2)　任意の $\mu, \nu \leq \lambda$ で，$\kappa = \mathrm{cf}\,(\mu) = \mathrm{cf}\,(\nu) > \omega$ かつ $c^{-1}(A \cap \mu) \cap d^{-1}(B \cap \nu)$ が κ で非定常的あるものに対して（ここで，c および d はそれぞれ μ および ν の標準関数とする），次のどれかが成り立つ：

(i) もし $\mu \notin A$ かつ $\nu \notin B$ ならば，$A \cap \mu$ が μ で非定常的かまたは $B \cap \nu$ が ν で非定常的となる。

(ii) もし $\mu \in A$ かつ $\nu \notin B$ ならば，$A \cap \mu$ が μ で有界かまたは $B \cap \nu$ が ν で非定常的となる。

(iii) もし $\mu \notin A$ かつ $\nu \in B$ ならば，$A \cap \mu$ が μ で非定常的かまたは $B \cap \nu$ が ν で有界となる。

定理 2.1 の (2) の条件は極めて複雑であると感じられる。同じ論文に $A \times B$ の正規性の必要十分条件も与えられているが，同様に複雑な条件である。

3　長方形的積空間

任意の位相空間 X, Y の積空間を $X \times Y$ とする。その部分集合で $P \times Q$ の形のものを，$X \times Y$ の**長方形**という。特に，$X \times Y$ の長方形 $P \times Q$ が**閉長方形（コゼロ長方形）**であるとは，P および Q がそれぞれ X および Y の閉集合（コゼロ集合）であるとき。

位相空間 X, Y の積空間 $X \times Y$ が**長方形的** [9] であるとは，$X \times Y$ の任意の有限コゼロ被覆が，σ-局所有限な細分でコゼロ長方形からなるものをもつとき。

この積空間に定義される概念は次元論から生まれたものであり，それを用いた定理は次の通りである。これはそれまでの多くの結果を統一するものであった。

定理 3.1 (Pasynkov 1975, [9]). X, Y を完全正則空間とする。もし $X \times Y$ が長方形的ならば，不等式 $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ が成り立つ。

しかし，この定理以外で有効な結果は，あまり見られなかった。ところが，順序数の部分空間による積空間に関して，次の結果が証明された。

定理 3.2 (家本-矢島 2007, [8]). 順序数の任意の部分空間 A, B に対して，$A \times B$ が可算パラコンパクトである必要十分条件は，それが長方形的となることである。

しかし，この結果は $A \times B$ の長方形性と定理 2.1 の (2) の面倒な条件が，同値であることを証明することによって得られている。

順序数の部分空間を GO-空間や単調正規空間に拡張して論じるとき，可算パラコンパクト性よりも長方形性を用いたほうが一般化しやすい。従って，今後は上記の $A \times B$ の可算パラコンパクト性の代わりに，長方形性を用いることにする。

4　予想外の結果

一般に順序数 λ の部分空間 A を考えるとき，A が λ で定常的か否かに分けて考えていく。実際，A が λ で定常的のときには，A に対して押し下げ補題を使って議論を進める。そうでないときは，A を有界部分集合による位相和で表せるという簡単な構造になってしまう。

一方，順序数の部分空間の積空間 $A \times B$ に関する証明は，論文 [6] に見られるように $A \times B$ が長方形的な場合と，そうでない場合に分けて証明していくことが有効であることが分かってきた。

そこでまず手始めに，問題 3 を次のような特殊な場合から攻略していくことにした。

問題 3*. 順序数の任意の部分空間 A, B に対して，もし $A \times B$ が長方形的ならば，等式 $e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ が成り立つか？

実は，問題 3* は定理 2.1 の (2) の条件を用いて場合分けして考えていけば，比較的容易に肯定的であることを証明できる。そこで，残るは次の問題となる。

問題 3**. 順序数の任意の部分空間 A, B に対して，もし $A \times B$ が長方形的でないとき，等式 $e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ が成り立つか？

ところで，問題 3** はなかなか証明できなかった。実は長方形的でないどんな $A \times B$ についても，成り立たないからである。すなわち，次の結果を証明するに至った。

定理 4.1. 弱到達不可能基数は存在しないと仮定する。順序数の任意の部分空間 A, B に対して，次は同値である。

(a) $A \times B$ は長方形的である。

(b) $A \times B$ の任意の閉長方形 $A' \times B'$ に対して，等式 $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が成り立つ。

定理 4.1 において，基数 κ が**弱到達不可能**であるとは，κ が正則な非可算極限基数であるときであり，その存在は ZFC の中では証明できない。

公理的な仮定はあるものの，実際に定理 4.1 を利用する場合にはほぼ無視できる。定理 2.1 の (2) の条件と比べて，はるかに簡単になっていることに注意してほしい。さらに，次のような簡単な例がある。

例 4.2. ある弱到達不可能基数 κ が存在すると仮定する。

ここで，$A = \kappa, B = \{\kappa\} \cup \{\alpha + 1 : \alpha \in \kappa\}$ とおく。

このとき，$A \times B$ は長方形的ではないが，$A \times B$ の任意の閉長方形 $A' \times B'$ に対して，等式 $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が成り立つ。

例 4.2 によって，定理 4.1 の同値性は ZFC から独立の命題であることが分かる。

5　GO-空間や単調正規空間への一般化

まず，次の一般化のための関係を思い出してほしい。

$$\text{順序数の部分空間} \Longrightarrow \text{GO-空間} \Longrightarrow \text{単調正規空間}$$
$$\Longrightarrow \text{族正規かつ可算パラコンパクト空間}$$

空間 X が**強族ハウスドルフ**とは，X の任意の closed discrete subset D に対して，ある discrete な族 $\{U_d : d \in D\}$ で，任意の $d \in D$ について U_d が d の開近傍であるようなものが存在するとき。次の関係に注意せよ。

$$\text{族正規かつ可算パラコンパクト} \Longrightarrow \text{expandable } T_3 \Longrightarrow \text{強族ハウスドルフ}$$

定理 5.1. 順序数の部分空間 A および族正規かつ可算パラコンパクト空間 Y に対して，もし $A\times Y$ が強族ハウスドルフかつ長方形的ならば，等式 $e(A\times Y) = e(A)\cdot e(Y)$ が成り立つ。

定理 5.1 と [5, Theorem 8.18] から，直接に次を得る。

系 5.2. 順序数の部分空間 A および GO-空間 Y に対して，もし $A \times Y$ が長方形的ならば，等式 $e(A \times Y) = e(A) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

定理 5.1 と [5, Theorem 7.11] から，直接に次を得る。

系 5.3. 順序数の部分空間 A および単調正規空間 Y に対して，もし $A \times Y$ が正規かつ長方形的ならば，等式 $e(A \times Y) = e(A) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, *On the cardinality of bicompacta satisfying the first axiom of countability*, Soviet Math. Dokl. **10** (1969), 951–955.

[2] I. Gorelic, *On powers of Lindelöf spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae **35** (1994), 383–401.

[3] A. Hajnal and I. Juhász, *Lindelöf spaces à la Shelar*, Topology I., Coll. Budapest 1978, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **23**, 555–567.

[4] Y. Hirata, N. Kemoto and Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with various special factors*, Topology and Appl. **164** (2014), 45–86.

[5] Y. Hirata, N. Kemoto and Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with various special factors*, Topology and Appl. **164** (2014), 45–86.

[6] Y. Hirata and Y. Yajima, *C^*-embedding implies P-embedding in products of ordinals*, Topology and Appl. **231** (2017), 251–265.

[7] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topol. Appl. **45** (1992), 245–260.

[8] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Topology and Appl. **154** (2007), 758–770.

[9] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.

[10] S. Shelah, *On some problems in genetal topology*, Contemp. Math. **192** (1996), 91–101.

[11] T. Usuba, *G_δ-topology and compact cardinals*, Fund. Math. **246** (2019), 71–87.